Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit

Beispielsammlung 10

Thema:

Über 40 Signifikanztests

Datei Nr. 35102

Stand: 5. Februar 2019

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Hinweis:

Der Text 35010 enthält die Einführung in das Erstellen und Bewerten von Signifikanztests.

Hier eine Sammlung von Aufgaben dazu.

Einige Beispiele des Einführungstextes wurden hier auch verwendet,
ferner eine Aufgaben aus 73111 (Abitur MV)

AUFGABENSAMMLUNG

Aufgabe 10.01 Gezinkter Würfel (Sehr ausführliche Lösung)

Von zwei Würfeln ist der eine ideal, der andere ist so gezinkt, dass $p(\{1\}) = 0{,}5$ ist.

Mit Hilfe eines Tests sollen die Würfel identifiziert werden.

Der Test soll den Umfang 20 und ein Signifikanzniveau von 20 % haben.

Welchen Annahmebereich erhält die Hypothese H_1: $p(\{1\}) = 0{,}5$ und welche Wahrscheinlichkeiten haben beide Fehler?

Aufgabe 10.02 Verbogene Münze

Eine Münze ist ideal, die andere leicht verbogen. Sabine führt folgenden Test durch:
Sie wirft eine ausgewählter Münze, von der sie annimmt, sie sei ideal, 100 mal und will ihre Hypothese annehmen, wenn mindestens 40 mal und höchstens 60 mal Wappen auftritt.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

b) Sabine wählt nun einen anderen Annahmebereich und erhält $\alpha = 0{,}0066$
Wie groß ist der Annahmebereich

c) Berechne der Fehler 2. Art, wenn p = 0,65 ist.

Aufgabe 10.03 Qualitätstest einer Maschine

Ein Betrieb stellt mit einer alten und mit einer neuen Maschine gleiche elektronische Bauteile her. Der Ausschuss beträgt bei der alten Maschine 20 %, bei der neuen 10 %. Der Verpackung sieht man die Herstellungsmaschine nicht an. Ein Kunde verlangt nur Bauteile der neuen Maschine, will aber die Lieferung testen. Dazu entnimmt er 50 Stück auf zufällige Art.

a) Wann muss er die Lieferung ablehnen, wenn er ein Signifikanzniveau von 10% einhalten will? Mit welcher Wahrscheinlichkeit begeht er einen Fehler 1. oder 2. Art?

b) Wieso ist für ihn der große Fehler 2. Art ungünstig? Wie kann der Kunde dieses Konsumentenrisiko verringern? Belege Deine Antwort durch eine Beispielrechnung.

c) Rechne die Aufgabe a) für n =100 durch.

d) Wie entscheidet der Kunde bei n = 100, $\alpha = 5\%$ und 15 gefundenen Ausschussteilen?

Aufgabe 10.04 Sensation

Eine Zeitung bringt folgende Überschrift:

Polizist hält Schnupftabak für Rauschgift

Erkläre an Hand dieses Textes die Fehler 1. und 2. Art.

Aufgabe 10.05 Ungenaues Gewehr

Ein Sportschütze besitzt zwei Gewehre mit den Trefferwahrscheinlichkeiten 0,9 und 0,7.
Mit 20 Probeschüssen will er das bessere Gewehr identifizieren.
Er will den Fall, das schlechtere Gewehr für das bessere zu halten, halb so groß machen wie umgekehrt.
Berechne den Annahmebereich für den Test.

Aufgabe 10.06 Farbtest

In einer Urne liegen 400 Kugeln der Sorte 1 und 600 der Sorte 2. Es sind rote und grüne Kugeln. Man weiß nicht mehr, ob die Sorte 1 rot oder grün ist.
Durch einen Test soll die Hypothese H_1 : „Es sind 400 rote Kugeln“ überprüft werden.

a) In einem sehr einfachen Test werden 5 Kugeln blind entnommen. Lege einen Annahmebereich fest, berechne die zugehörige Wahrscheinlichkeit, sowie die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art. Überlege, was geschieht, wenn man den Annahmebereich verändert, mache dazu einige Zahlenangaben.

b) Es ist nun völlig unklar, welcher Fall vorliegt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei dem Test aus a) eine falsche Aussage zu machen.
Bei wie vielen von 10 Testpersonen kann man mit einem Fehlurteil rechnen?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit entscheiden 6 Personen falsch?

c) Herr Zirkel denkt sich dieses Entscheidungsverfahren aus: Wenn die ersten 3 von 5 gezogenen Kugeln rot sind, dann schließt er auf 600 rote Kugeln.
Berechne dazu die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fehler.

d) In einem neuen Test werden 20 Kugeln entnommen. Zeichne die Histogramme für $p = 0,4$ und $p = 0,6$ in ein gemeinsames Achsenkreuz und lies daraus die für α und β günstige Grenze für Annahme- bzw. Ablehnungsbereich ab. Berechne dazu α und β.

Aufgabe 10.07 Neue Blumensorte

Bei der Züchtung der Blumensorte *„Rotweisia“* stehen weiße und rotblühende Exemplare zur Verfügung.
Eine der Farben ist ein dominantes Merkmal, denn es setzt sich erblich mit 75% Wahrscheinlichkeit durch.
In einem Kreuzungsversuch erhält man 15 Exemplare.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man sich, wenn man die nunmehr häufigste Farbe für die dominante hält?
Anleitung: Verwende die Hypothese H_1 : „rot ist dominant“. Wenn eine Farbe häufiger als die andere auftritt, dann gilt für ihre Anzahl $X > \frac{1}{2}n$ ...

Aufgabe 10.08 Multiple Choice Test

Bei einer Prüfung werden n Fragen gestellt. Zu jeder sind zwei Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Die Lösung wird angekreuzt. Von einem gut vorbereiteten Schüler wird angenommen, dass er seine Fragen mit 97% Wahrscheinlichkeit weiß, während ein schlecht vorbereiteter nur 75 % hat. Der Fachlehrer muss nun zur Benotung es Test einen Annahmebereich festlegen, bei dessen Erreichen der Test als bestanden gilt. Bei mehr als k richtigen Antworten soll der Test bestanden sein. Er stellt daher folgende Anforderungen: Ein guter Schüler soll mit mindestens 98% bestehen, ein schlechter mit mindestens 90% durchfallen.

Zeige, dass diese Bedingungen bei n = 15 Fragen nicht erfüllt werden können, wohl aber bei n = 20 und n = 50.

Aufgabe 10.09 Spielautomat

Eine Kommission prüft einen Automaten, der laut Hersteller einen Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit p=0,5 liefert. Sie will ihn beanstanden, wenn bei 20 Spielen mehr als 14 verloren werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein guter Automat beanstandet?

Aufgabe 10.10 Placebo Wirkung

Man hat festgestellt, dass Placebos bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleich aussehende echte Tabletten. Die Erfahrung einer Klinik besagt, dass 60 % der Patienten, die Beruhigungspillen einnehmen, auf Placebos ansprechen.

Ein Klinikarzt meint, dass die Wirkung noch höher ist, wenn man Placebos mit bitterem Beigeschmack verwendet. Er gibt dazu 20 Patienten die neuen Placebos und stellt fest, dass 15 von ihnen darauf ansprechen. Muss daraufhin die Nullhypothese verworfen werden?

Rechne mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$.

Aufgabe 10.11 Schlechte Schrauben

Nach unsachgemäßer Bedienung einer Produktionsmaschine für Schrauben wird befürchtet, dass sich der Anteil fehlerhafter Schrauben von bisher 10% erhöht hat. Man entnimmt der laufenden Produktion 20 Schrauben und findet darunter 6 fehlerhafter Schrauben.

Ist die Befürchtung begründet, wenn man ein Signifikanzniveau von 5 % zugrunde legt?

Aufgabe 10.12 Defekte Bauteile

Ein Abnehmer von Bauteilen, die mit der Fehlerquote 10% geliefert werden, hat den Verdacht, dass diese höher liegt. Er testet 100 Bauteile. Wie lautet die Nullhypothese?

Bestimme den Ablehnungsbereich, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 2 % zugrunde gelegt wird. Welcher Fehler kann dabei begangen werden? Wie lautet das Urteil, wenn 19 der 100 getesteten Teile defekt sind?

Aufgabe 10.13 Schwarzfahrer

An der Straßenbahnlinie 8 wird vermutet, dass der Anteil der Schwarzfahrer 5 % beträgt. Nach einer drastischen Preiserhöhung soll überprüft werden, ob sich dies verändert hat. Dazu werden 200 Personen kontrolliert. Bei mehr als 15 Schwarzfahrern soll die Hypothese „Der Anteil der Schwarzfahrer ist gleich geblieben“ verworfen werden.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und auch 2. Art, wenn nunmehr 10% Schwarzfahrer darunter sind.

b) Muss man die Hypothese verwerfen, wenn man bei einem Signifikanzniveau von 10% 13 Schwarzfahrer ermittelt?

Aufgabe 10.14 Blutanalyse

Um zu prüfen, ob 75% der Bevölkerung den Blutfaktor F haben, untersucht ein Arzt 50 zufällig ausgewählte Personen. Als Signifikanzniveau wählt er 5%. Wie lautet die Nullhypothese?
Welches sind Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese?
Wie wird bei 30 Personen mit dem Faktor F entschieden?

Aufgabe 10.15 Weinprobe

Ein Moselweinkenner vermutet, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% am Geschmack des Weines die Weinlage erkennen kann. Dazu macht er mit 20 Moselweinen einen Test. Als Signifikanzniveau wählt er 10%. Wie entscheidet er bei 12 richtigen Bestimmungen?

Aufgabe 10.16 Im Supermarkt

Der Chef vom S-Markt weiß, dass 60% seiner Kunden 3- bis 4-mal wöchentlich bei ihm einkaufen. Nach einer Modernisierung seines Ladens möchte er testen, ob sich dies geändert hat. Deshalb werden 100 Kunden befragt. Wie lauten die Hypothesen? Welche Testvariable wählt man?
Bestimme zum Signifikanzniveau 8% den Ablehnungsbereich der Nullhypothese.
Wie wird entschieden, wenn 69 der befragten Kunden 3- bis 4-mal im S-Markt einkaufen? Welcher Fehler kann der Geschäftsleitung unterlaufen?

Aufgabe 10.17 Kugel über Kugeln

In einer Urne befinden sich sehr viele rote und schwarze Kugeln. Jemand vermutet, dass der Anteil der schwarzen Kugeln 40% ist. Er zieht 20 Kugeln zufällig und findet darunter 12 schwarze. Wie ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% zu entscheiden?

Aufgabe 10.18 Glücksrad

Bei einem Glücksrad mit den Ziffern 1 , 2 und 3 wird getestet, ob die 2 tatsächlich mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 auftritt. Dazu wird es 20-mal gedreht.
Bestimme den Ablehnungsbereich der Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 10%. Wie groß ist der Fehler 2. Art, wenn weiß mit p = 0,5 auftritt?

Aufgabe 10.19 Mit Tetraeder würfeln

Mit einem Tetraeder, das die Zahlen 1 , 2 , 3 , 4 zeigt, soll die Hypothese H_o: “Mit p = 0,5 erhält man eine gerade Zahl“ getestet werden. H_o wird abgelehnt, wenn unter 20 Würfen weniger als 6 oder mehr als 14 gerade Zahlen auftreten.
Wie groß sind die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten?
Beim Fehler 2. Art rechne mit p = 0,4. Beschreibe diese Fehler mit Worten

Aufgabe 10.20 Einfach mal so

Es soll die Nullhypothese p = 0,4 getestet werden. Der Testumfang sei 100.

a) Ermittle den Ablehnungsbereich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%. Wie groß ist dann das Risiko 2. Art, wenn in Wirklichkeit p = 0,5 gilt?

b) Ermittle den Ablehnungsbereich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit 0,01
Berechne das Risiko 2. Art für p = 0,5; 0,4; 0,3.

c) Der Ablehnungsbereich sei $\overline{A} = \{0\,;\ldots;26\} \cup \{54\,;\ldots;100\}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art, wenn in Wirklichkeit p = 0,5 gilt?

Aufgabe 10.21 Oder so

Es soll $H_o:\ p \le 0{,}2$ bei n = 50 getestet werden.

a) Ermittle den Ablehnungsbereich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 %.
Wie groß ist das Risiko 2. Art, wenn p = 0,4 gilt?

b) Ermittle den Ablehnungsbereich bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %.
Wie groß ist das Risiko 2. Art, wenn p = 0,5 ; 0,4 ; 0,3 gilt?

c) Der Ablehnungsbereich sei $\overline{A} = \{20\,;\ldots;50\}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art, wenn in Wirklichkeit gilt p = 0,5?

Aufgabe 10.22 2 Euro

Der 2 € - Münze sagt man nach, dass sie **beim Drehen** nicht gleichmäßig fällt. Die Seite mit der Zahl 2 soll häufiger oben liegen als die Rückseite.
Durch 100 Drehungen soll getestet werden ob sie ideal ist.

a) Berechne α und β für den Annahmebereich $A = \{40\,;\ldots;60\}$, wobei für einen Fehler 2. Art mit $p = \frac{2}{3}$ gearbeitet werden soll.

b) Lege den Annahmebereich mit dem Signifikanzniveau 10 % fest.
Berechne dann α und β erneut wie in a).

c) Wie ändert sich b), wenn man den Testumfang auf 200 erhöht?

Aufgabe 10.23 Sudoku

Friedrich ist ein Meister im Lösen von Sudoku-Rätseln. Er sagt von sich selbst, dass er in 95% aller Fälle ein Sudoku von mittlerem Schwierigkeitsgrad innerhalb von 10 Minuten lösen kann. Sein Konkurrent Edgar behauptet, dass dies übertrieben sei, denn er sei auch nicht besser als er, wobei er eine Lösungswahrscheinlichkeit von 75% besitzt.
Beide einigen sich auf einen Test, bei dem Friedrich 20 Sudokus zu lösen hat.
Du sollst nun den Annahmebereich für Friedrichs Behauptung (Hypothese) so festlegen, dass die Summe der beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten minimal ist.

Aufgabe 10.24 Politiker

Der Bekanntheitsgrad p des Spitzenkandidaten einer Partei liegt derzeit bei höchstens 80%.
Die Partei will eine Agentur beauftragen, den Bekanntheitsgrad auf über 80% zu steigern. Sie schlägt der Agentur vor, auf Erfolgsbasis zu arbeiten, d.h. sie wird nur im Erfolgsfall bezahlt. Um über den Erfolgsfall zu entscheiden, möchte die Partei nach einer festgelegten Zeitspanne die Nullhypothese H_O: $p \leq 0,8$ an 200 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten testen und H_o nur dann ablehnen (was einen Erfolg für die Agentur bedeutet), wenn mindestens 170 der Befragten den Spitzenkandidaten kennen.

a) Wie hoch ist dabei das Risiko für die Agentur, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten?

b) Weil die Agentur dieses Risiko niedrig halten will, ist sie mit der Entscheidungsregel der Partei nicht einverstanden. Sie schlägt vor, diese so zu verändern, dass ihr Risiko, trotz eines Bekanntheitsgrades von 85% kein Geld zu erhalten, kleiner als 10% ist. Bestimme dafür den kleinstmöglichen Ablehnungsbereich.

Die Aufgaben 10.25 bis 10.33 sind dem Einführungstext 35010 entnommen.

Dort werden die Lösungen noch ausführlicher besprochen als hier.

Aufgabe 10.25 Bluthochdruck

a) Ein Pharmazieunternehmen verbessert ein bekanntes Medikament, das gegen Bluthochdruck bisher in 60% aller Fälle gewirkt hat und behauptet, dass es nun bei (mindestens) 80 % der Patienten positiv anschlägt. Eine Klinik testet dieses Präparat an 50 Patienten und will dem

Hersteller glauben, wenn bei mehr als 35 Personen eine Heilung festgestellt wird.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art.

b) Um einen Test mit stärkerer Aussagekraft zu erhalten, kann man den Umfang der Stichprobe erhöhen. Der Test zur Nullhypothese $p \geq 0{,}8$ für die Wirksamkeit des Medikaments soll neu festgelegt werden.
Bestimme die Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau 10%.

Aufgabe 10.26 Kugellager

Die Behauptung, dass ein Kugellager einer Maschine mit höchstens 10% Wahrscheinlichkeit ein Q2-Lager ist, soll anhand einer Stichprobe von 100 Stück auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Geben Sie eine Entscheidungsregel an.

Aufgabe 10.27 Spielautomaten

Bei Spielautomaten der Sorte K dürfen laut Verordnung nur höchstens 60% der Spiele verlorene Spiele sein. Ein amtlicher Prüfer testet einen Spielapparat so: Er will 20-mal spielen und den Automat dann sperren lassen, wenn er mehr als 15 mal verliert.

a) Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit sowie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

b) Wie groß ist der Fehler 2. Art, wenn der Apparat tatsächlich in 70 % aller Fälle keinen Gewinn ausschüttet?

Wie würden Sie den Test einschätzen?

Beim 2. Automaten spielt er 50-mal. Wie muss er die Grenzen des Ablehnungsbereiches festlegen, wenn das Signifikanzniveau 10 % betragen soll?
Muss er bei 38 verlorenen Spielen den Apparat einziehen?

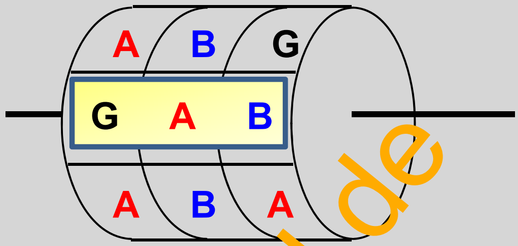
Aufgabe 10.28 Zu viele LKWs

Ein Verkehrspolizist äußert die Vermutung, dass in letzter Zeit die Anzahl der LKWs, die durch den Ort fahren, zugenommen hat. Bisher war deren Anteil 20%. Um diese Vermutung zu testen, werden die nächsten 50 vorbeifahrenden Fahrzeuge gezählt und dabei 13 LKWs festgestellt.
Ist dieses Ergebnis auf einem Niveau von 5 % signifikant?

Aufgabe 10.29 Spielautomat

(Auszug aus einer Abituraufgabe 2000 LK Mathematik WG in BW.- Siehe Text 74211 Seite 36)

Das 3-Glocken-Spiel wird auf einem Spielautomaten gespielt. In diesem Spielautomaten drehen sich drei Glücksräder. Auf jedem Glücksrad sind 10 Bilder: 6 Äpfel (A), 3 Birnen (B) und eine Glocke (G).



Ein Spielhallenbetreiber befürchtet, dass er seinen 3-Glocken-Automat austauschen muss, weil er vermutet, dass pro Spiel die Wahrscheinlichkeit für 3 Birnen über 3% liegt.
Er will seine Vermutung mit 100 Spielen testen. Bei welchen Testergebnissen wird er sich mit ***99 %-iger Sicherheit*** für den Austausch entscheiden?

Aufgabe 10.30 Bunte Glaskugeln

Ein Händler hat eine Kiste mit mehreren Tausend Glaskugeln mit einem Anteil von 30% roten Kugeln gekauft. Er möchte diese Behauptung testen. Er wird also die Lieferung zurückschicken, wenn der Anteil der roten Kugel zu hoch oder zu klein ist. Er überprüft 50 zufällig herausgegriffene Murmeln und legt seinen **Annahmebereich von 13 bis 17** roten Kugeln fest.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
Wie groß ist der Fehler 2. Art, wenn in Wirklichkeit p = 0,2 gilt?

b) Wie fallen α und β aus, wenn man n = 100 und den Annahmebereich $A = \{24 ; \ldots ; 40\}$ verwendet?

Der Händler will mit einem Signifikanzniveau von 14% arbeiten.
Die Nullhypothese lautet: p = 0,3

c) Lege zu n = 50 einen geeigneten Annahmebereich fest.
Berechne die Annahmewahrscheinlichkeit sowie die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. Art und 2. Art, unter der Annahme, dass „rot" nur zu p = 0,2 vorhanden ist.

d) Führe dasselbe mit n = 100 durch.

Aufgabe 10.31 Düngemittel

Ein Landwirt testet die Wirksamkeit zweier Düngemittel D1 und D2 auf 20 Testfeldern. Diese Felder werden je zur einen Hälfte mit D1 und zur anderen Hälfte mit D2 gedüngt. Sein Testergebnis sieht so aus:
Auf 13 Feldern bringt D1 mehr Ertrag als D2, auf 7 Feldern bringt D2 mehr Ertrag als D1.
Entwickle für den Landwirt eine **Entscheidungsregel**, mit dem er die Hypothese sinnvoll überprüfen kann, ob beide Düngemittel gleich wirksam sind.
Wie würde der Hersteller eine Entscheidungsregel haben wollen?

Aufgabe 10.32 Ein-Kind-Familien

Klaus testet die Hypothese, dass 70% der Kinder einer großen Schule aus Familien stammen, die nur 1 Kind haben. Er beschließt, als Annahmebereich ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall zu verwenden. Dazu wählt er zufällig 100 Kinder aus. X sei die Zahl der Kinder ohne Geschwister.
Welchen Annahmebereich muss er verwenden, wenn er auf einem Signifikanzniveau von 10% arbeiten will?
Wie wird er bei 62 geschwisterlosen Kindern entscheiden?

Aufgabe 10.33 Schrauben sortieren

Ein Händler besitzt zwei Kisten mit Schrauben. Die eine enthält Schrauben der Qualitätsstufe 1, was bedeutet, dass nur 10% der enthaltenen Schrauben die vorgeschriebene Messgenauigkeit nicht einhalten. Die andere Kiste enthält jedoch 40% Ausschuss, ist also von 2. Wahl und daher billiger. Da die Aufkleber für die Kisten fehlen, weiß der Händler nicht, welche Kiste welche Sorte enthält.
Die sicherste Methode wäre natürlich die, alle Schrauben zu untersuchen. Dies ist aber zu aufwändig und verursacht viele Kosten. Um Zeit und Geld zu sparen beschließt er daher, einen Test durchzuführen. Dazu entnimmt er von einer Kiste eine **Stichprobe** von (nur) 10 Schrauben und prüft sie. Auf Grund des Ergebnisses will er dann entscheiden. Wie kann der Test aussehen?

Aufgabe 10.34 Fehlerhafte Schränke

Bei der Herstellung weisen erfahrungsgemäß maximal 4 % der Schränke Fehler auf.
Die Anzahl der fehlerhaften Schränke wird als binomialverteilt angenommen.
Es wird ein verändertes Herstellungsverfahren erprobt, von dem ein Kritiker behauptet, es erhöhe den Anteil der fehlerbehafteten Schränke. Um diese Behauptung zu überprüfen, werden der nach dem neuen Verfahren laufenden Produktion 20 Schränke zufällig entnommen und geprüft. Geben Sie eine Entscheidungsregel dieses Testes für den Fall an, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit etwa 5% betragen soll.

Aufgabe 10.35 Kamin im Wohnzimmer

In einer Fachzeitschrift liest der Kaminbauer, dass höchstens 23 % aller Bauherren einen Kamin errichten lassen. Er möchte diese Behauptung prüfen und befragt dazu auf einer Baumesse 100 zufällig ausgewählte Bauherren. Dabei legt er fest, dass die Behauptung abgelehnt wird, wenn sich mehr als 30 Befragte für den Einbau eines Kamins entscheiden. Die Zufallsgröße wird als binomialverteilt angenommen.

a) Geben Sie das Signifikanzniveau des Tests an. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, die Behauptung entsprechend der oben angegebenen Entscheidungsregel abzulehnen, wenn der Anteil der Bauherren, die einen Kamin bauen lassen, in Wirklichkeit 20 % beträgt.

Aufgabe 10.36 Blut spenden

Der Blutspendedienst des DRK hat bei einer Spendenaktion festgestellt, dass von insgesamt 2010 Blutspenden 25 Spenden der Blutgruppe AB- sind.

Weisen Sie nach, dass man deshalb mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % nicht davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.

Berechnen Sie, wie viele Blutspenden der Blutgruppe AB- mindestens unter diesen 2010 Spenden sein müssten, damit man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % davon ausgehen darf, dass der Anteil von Spendern mit der Blutgruppe AB- ungewöhnlich hoch ist.

Aufgabe 10.37 Senden und empfangen

(In dieser Aufgabe geht es um Datenübertragung durch Sendemast und Antenne.)
Durchschnittlich rechnet man mit 0,1% gestörter Signale. In einem Test werden 8 von 5000 übertragenen Signalen ungenau empfangen, d. h. die Übertragungen wurden gestört. Daraufhin wird angenommen, dass der Anteil der gestörten Signale höher sei. Beurteilen Sie diese Annahme unter Berücksichtigung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.

Aufgabe 10.38 Carport-Dach

Für die Dachverblendung des Carports sollen quadratische Schieferplatten montiert werden. Der Hersteller der Schieferplatten gibt an, dass durch Fertigung und Transport mit einem Anteil defekter Platten von 5% zu rechnen ist.
Oberprüfen Sie, ob die Behauptung des Herstellers mit einem Signifikanzniveau von 0,05 korrekt ist, wenn in einer Teillieferung von 200 Platten höchstens 15 defekt sind.

Aufgabe 10.39 Kondensatoren

Ein Produzent behauptet, seine Kondensatoren seien zu höchstens 4% fehlerhaft.
Es werden zufällig 1000 Kondensatoren ausgewählt und überprüft.
Bei dieser Kontrolle werden 48 defekte Kondensatoren festgestellt.

Prüfen Sie, ob man der Aussage des Produzenten mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% vertrauen kann.

Aufgabe 10.40 Leitpfosten

Im Straßenverkehr dienen Leitpfosten dem besseren Erkennen des Verlaufs der Fahrbahn. An Gefahrenstellen sind die Reflektoren gelb, anderenfalls sind sie weiß. In einer Diskussionsrunde unter fünf Personen hat sich ergeben, dass vier der anwesenden Personen diese Tatsache noch wussten. Es wird diskutiert, ob in der gesamten Bevölkerung dieser Anteil auch vier Fünftel beträgt. Daher wird eine Umfrage vorbereitet.
Formulieren Sie zwei Bedingungen, die bei der Auswahl der Teilnehmer der Umfrage berücksichtigt werden müssen, damit das Ergebnis der Umfrage aussagekräftig wird. Begründen Sie.
In einer solchen Umfrage unter 100 Personen beschreibt die binomial verteilte Zufallsvariable X die Anzahl der Personen, die diese Tatsache noch kannten. Es soll die Annahme überprüft werden, ob der Anteil der Gesamtbevölkerung, der diese Tatsache kennt, mindestens vier Fünftel beträgt. Formulieren Sie für ein Signifikanzniveau von 10 % eine Entscheidungsregel.

Aufgabe 10.41 Gläserproduktion

Man weiß aus Erfahrung, dass bei der Produktion von Isoliergläsern fehlerhafte Produkte mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1,5 % auftreten. Eine Tagesproduktion umfasst 2000 Gläser.

a) Geben Sie den Erwartungswert an und berechnen Sie die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Gläser in einer Tagesproduktion.

b) Ermitteln Sie die Höchstzahl fehlerhafter Gläser in der Tagesproduktion, bis zu der man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % noch davon ausgehen kann, dass sich die Fehlerquote nicht erhöht hat.

Aufgabe 10.42 1-Personen-Haushalte

Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5 % ein Test durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, irrtümlich davon auszugehen, dass die Vermutung zutrifft.
Geben Sie die passende Nullhypothese an und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Aufgabe 10.43 Beschichtete Rohre

Ein Hersteller beschichteter Rohre, wie sie auch für den Bau dieses Aussichtsturms verwendet wurden, wirbt damit, dass höchstens 3% seiner Rohre minimale Beschichtungsfehler aufweisen. Es besteht der Verdacht, dass dieser Wert höher ist. Daher werden 150 Rohre der laufenden Produktion entnommen und auf Beschichtungsfehler untersucht. Begründen Sie, dass man die Anzahl der Rohre mit Beschichtungsfehlern als binomialverteilt annehmen kann.
Formulieren Sie für ein Signifikanzniveau von 5% eine Entscheidungsregel.

LÖSUNGEN

Sehr ausführliche Lösung von Aufgabe 10.01 Alternativtest

Von zwei Würfeln ist der eine ideal, der andere ist so gezinkt, dass $p(\{1\}) = 0,5$ ist.

Mit Hilfe eines Tests sollen die Würfel identifiziert werden.

Der Test soll den Umfang 20 und ein Signifikanzniveau von 20 % haben.

Welchen Annahmebereich erhält die Hypothese H_1: $p(\{1\}) = 0,5$ und welche Wahrscheinlichkeiten haben beide Fehler?

Vorbereitung: X sei die Anzahl der Einser bei einem Test vom Umfang 20. X ist binomialverteilt und hat den Ergebnisraum $S = \{0 ; ... ; 20\}$. Es handelt sich um einen Alternativtest, denn es gibt zwei Hypothesen: H_1 : $p(\{1\}) = 0,5$ und H_2 : $p(\{1\}) = \frac{1}{6}$.

Zugehörende Erwartungswerte: $E_1(X) = 20 \cdot 0,5 = 10$ und $E_2(X) = 20 \cdot \frac{1}{6} \approx 3,3$.

<u>Konstruktion des Tests:</u>

Das Signifikanzniveau 20% gibt die Obergrenze für den Fehler 1. Art an: $\alpha \le 0,2$.

(Das besagt; Eine versehentliche Ablehnung soll nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% erfolgen.)

Strukturierung des Definitionsbereichs: $S = \{ \underbrace{0 ; 1 ; 2 ; \boxed{3} ; 4 ; ... ; L}_{A_2} | \underbrace{R ; ... ; \boxed{10} ; ... ; 20}_{A_1} \}$

A_1 ist der Annahmebereich für H_1 und damit auch der Ablehnungsbereich für H_2.

Bedingung für k: $\alpha = P(\overline{A_1}) = P(A_2) = P(X \le k) \le 0,2$

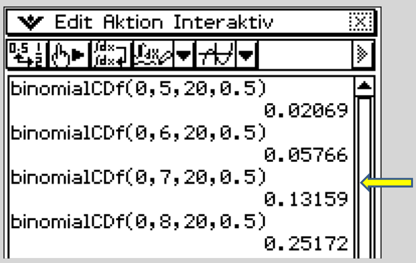
Es gibt verschiedene Wege zur Lösung dieser Ungleichung.

Zunächst einmal sollte klar sein, dass man solche *Ungleichungen* nicht direkt lösen kann.

Man wird im Grunde die ***Gleichung*** $P(X \le k) = 0,2$ lösen und findet dann die Lösungsmenge der ***Ungleichung***.

k bestimmt man entweder aus Tabellen der Verteilungsfunktion zur Binomialverteilung mit $p = 0,5$ oder man verwendet einen geeigneten Rechner.

1. Möglichkeit: Lösung durch Probieren (Berechnen einiger Werte):



Rechts Berechnungen mit der Funktion binomialCDf auf dem **CAS-Rechner CASIO ClassPad**.

Zu n = 20 und p = 0,5 wurde berechnet:

$P(0 \le X \le 5) \approx 0,021$ $\quad P(0 \le X \le 6) \approx 0,058$

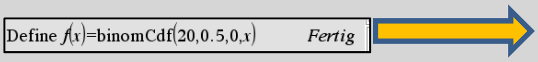
$P(0 \le X \le 7) \approx 0,132$ $\quad P(0 \le X \le 8) \approx 0,252$

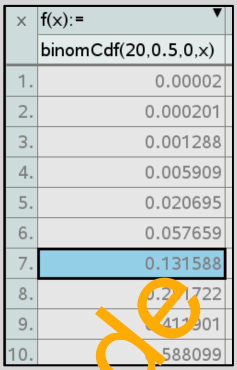
Ergebnis: Für k = 7 also $A_2 = \{0 ; ... ; 7\}$ wird $\alpha \approx 13,2\% < 20\%$.

2. Möglichkeit: Lösung Erstellen einer Wertetafel

Das ist vor allem dann sinnvoll, wenn n groß ist. Je nach Rechnermodell geht das anders.

Mit ***TI Nspire*** definiert man eine Binomialverteilungsfunktion wechselt dann zu „Lists & Spreadsheet“ und lässt sich dort eine Wertetafel anzeigen

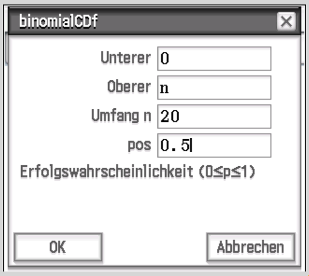


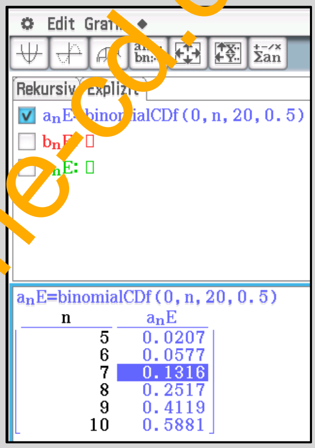


Arbeitet man mit *CASIO ClassPad II*, dann empfehle ich eine <u>explizite Folge</u> zu erzeugen. Zuerst erzeugt man den Folgenterm über das Menü

Interaktiv – Verteilungsfunktionen - diskret – binomialCDf

und füllt dann das Fenster aus:



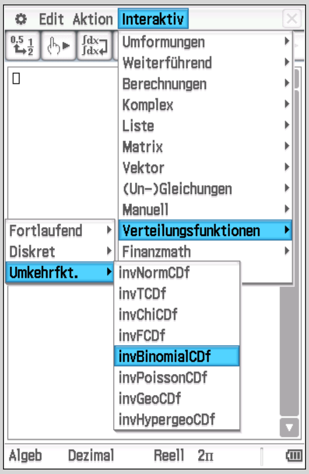


Dann kopiert man den Binomialterm und fügt ihn im Menü Folgen ein.

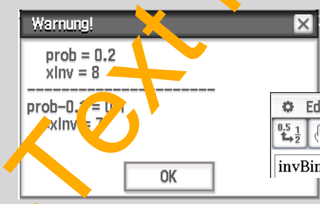
Dann erhält man die Folgentabelle und erkennt: $P(X \le 7) \approx 0,1316$

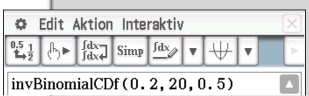
3. Möglichkeit: Lösung mit der <u>inversen Binomialfunktion</u>. (bei CASIO Rechnern.)

Damit kann man eine **<u>Gleichung</u> (nicht Ungleichung) der Form** $P(X \le k) = \alpha$ näherungsweise lösen. **Man gibt also n, p und α ein und erhält dann k.**



Lösung mit ClassPad II:

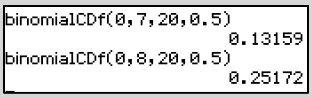




Die ausgegebene **Warnung** erscheint, weil der Rechner herausgefunden hat, dass der gesuchte k-Wert 8 oder 7 ist . Daher nun die

Probe: $P(X \le 7) \approx 0,13159$ **< 0,2**

$p(X \le 8) \approx 0,25172$ **> 0,2**



Also erkennt man, dass der günstige Wert k = 7 ist.

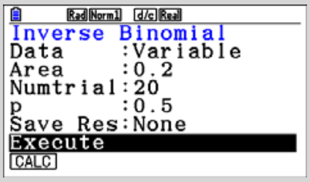
Ergebnis: Damit das Signifikanzniveau 20% beträgt, muss man k = 7 wählen.

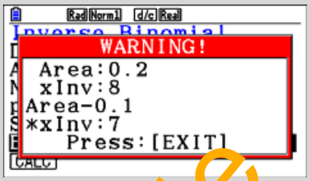
$S(X) = \{\underbrace{0,...,7}_{A_2} \mid \underbrace{8,...,20}_{A_1}\}$ Annahmebereich für H_1: $H_1 = \{8;9;...;20\}$

Lösung mit dem Grafikrechner Casio fx CG 20 :

Man öffnet dieses Menüfeld: Statistics - OPTN – STAT – DIST – BINOMIAL - **InvB**

Man gibt die Daten ein und erhält eine Warnung, weil das Ergebnis zwischen 7 und 8 liegt. Wir müssen nun durch eine Probe herausfinden, dass k = 7 günstig ist:

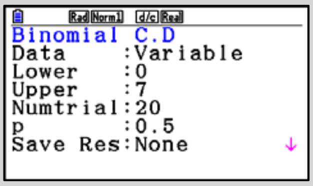


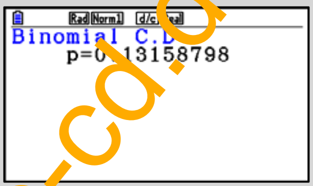


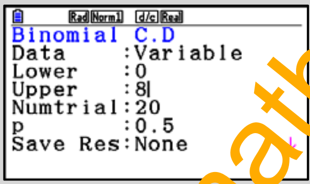
$$P(X \le 7) \approx 0{,}13159 \mathbf{< 0{,}2}$$

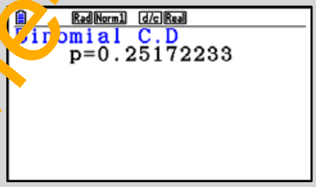
$$p(X \le 8) \approx 0{,}25172 \mathbf{> 0{,}2}$$

Usw.



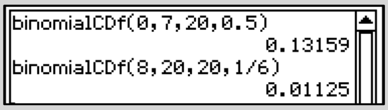






<u>Bewertung des Tests:</u>

Fehler 1. Art: $\alpha = P(A_2) = P(X \le 7) = F_B(7;20;0,5) = 0{,}1316$



Fehler 2. Art: Jetzt wird von H_2, also von $p_2 = \frac{1}{6}$ ausgegangen:

$$\beta = P(A_1) = P(X \ge 8) = 0{,}0113$$

Hinweis:

Bei manchen Rechnern (die als untere Grenze stets 0 verwenden) muss man so vorgehen:

$$\beta = P(A_1) = P(X \ge 8) = 1 - P(X \le 7) = 1 - F_B(7;20;\tfrac{1}{6}) = 1 - 0{,}9887 = 0{,}0113 .$$